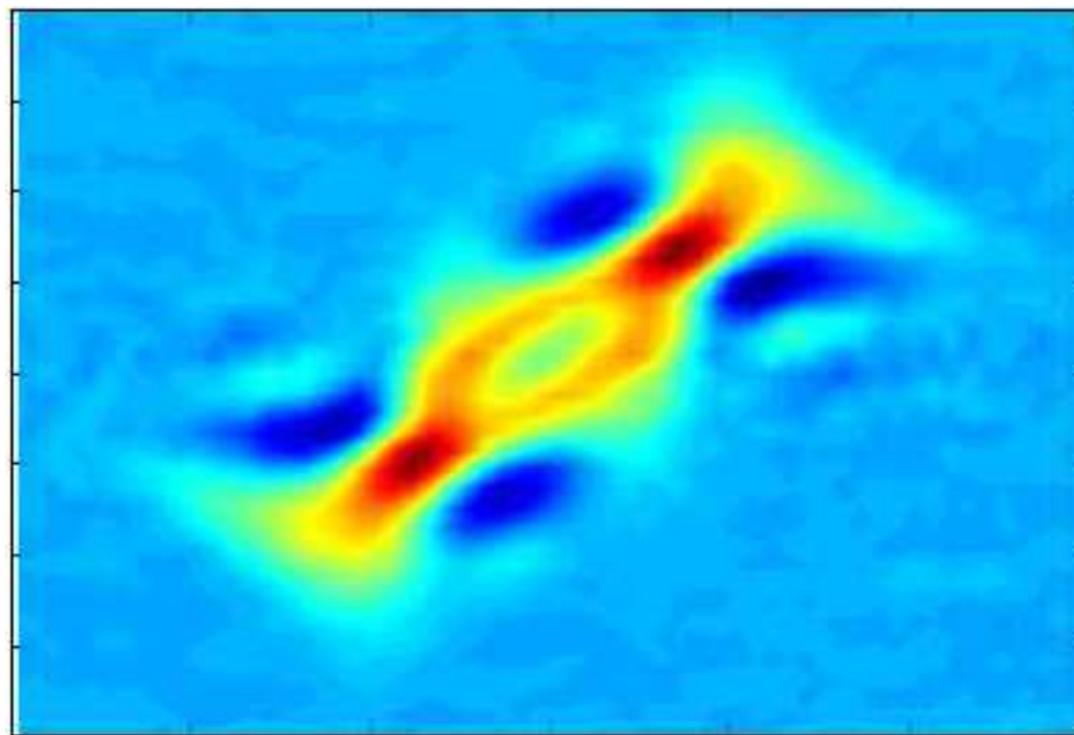


The Wigner formulation of Quantum Mechanics



Jean Michel Sellier, jeanmichel.sellier@gmail.com

ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE. BAND 81

1. Quantisierung als Eigenwertproblem;
von E. Schrödinger

(Vierte Mitteilung¹⁾

Inhaltsübersicht: § 1. Elimination des Energieparameters aus der Schwingungsgleichung. Die eigentliche Wellengleichung. Nicht-konservative Systeme. — § 2. Ausdehnung der Störungstheorie auf Störungen, welche explizite die Zeit enthalten. Dispersionstheorie. — § 3. Ergänzungen zu § 2: Angeregte Atome, entartete Systeme, Streckenspektrum. — § 4. Erörterung des Resonanzfalle. — § 5. Verallgemeinerung für eine beliebige Störung. — § 6. Relativistisch-magnetische Verallgemeinerung der Grundgleichungen. — § 7. Über die physikalische Bedeutung des Feldskalars.

§ 1. Elimination des Energieparameters aus der Schwingungsgleichung. Die eigentliche Wellengleichung.
Nichtkonservative Systeme

Die Wellengleichung (18) bzw. (18'') von S. 510 der zweiten Mitteilung

$$(1) \quad \Delta \psi - \frac{2(E - V)}{\hbar^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

bzw.

$$(1') \quad \Delta \psi + \frac{8\pi^2}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0,$$

welche das Fundament der in dieser Abhandlungsreihe versuchten Neubegründung der Mechanik bildet, leidet an dem Übelstand, daß sie das Veränderungsgesetz für den „mechanischen Feldskalar“ ψ nicht einheitlich und nicht allgemein ausspricht. Gleichung (1) enthält nämlich den Energie- oder Frequenzparameter E und ist, wie a. a. O. ausdrücklich betont, mit einem bestimmten E -Wert gültig für Vorgänge, welche

1) Vgl. Ann. d. Phys. 79, S. 381, 489; 80, S. 487, 1926; ferner über den Zusammenhang mit der Heisenbergschen Theorie: ebendort 79, S. 784.

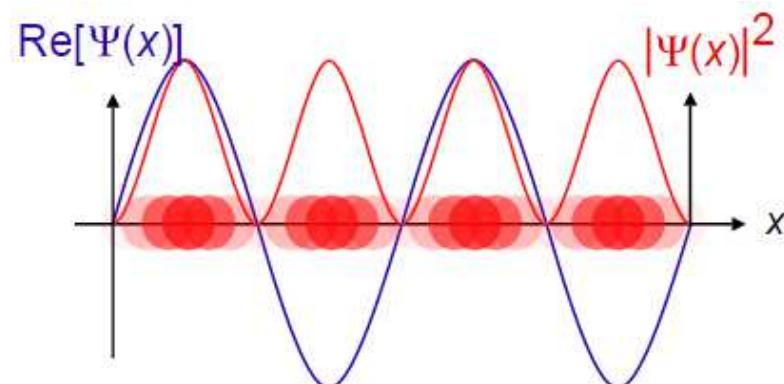


Wave function formulation - I

- Systems are described in terms of (complex) wave functions

$$\Psi = \Psi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)$$

- Born rule (heuristic)



- Observables are represented by operators

$$\hat{O} = \hat{O}(\hat{x}; \hat{p})$$

(*) Picture from wikipedia.

Wave function formulation - II

- Time-dependent Schrödinger equation

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

- Time-independent Schrödinger equation

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

Other formalisms

- Heisenberg – Density matrix
- Keldysh – Non-equilibrium Green functions
- Feynman – Path integrals
- Wigner – quasi-distribution functions
- Husimi – positive definite functions
- Etc.

On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium

By E. WIGNER

Department of Physics, Princeton University

(Received March 14, 1932)



$$\begin{aligned} \frac{\partial f_W}{\partial t} (\mathbf{x}; \mathbf{p}) &= - \frac{\mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}}{m} f_W (\mathbf{x}; \mathbf{p}) \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{q} f_W (\mathbf{x}; \mathbf{p} + \mathbf{q}) V_W (\mathbf{x}; \mathbf{p}) \end{aligned}$$

Phase space formulation - I

- Time-dependent Wigner equation

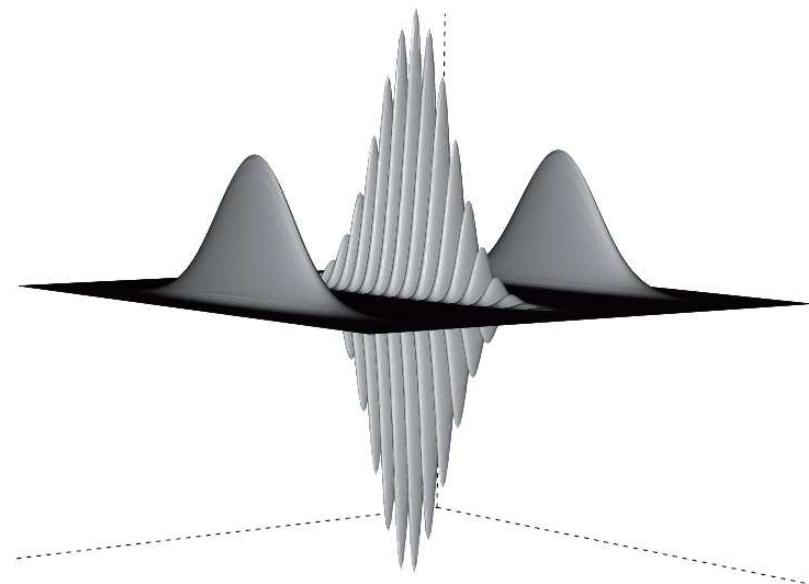
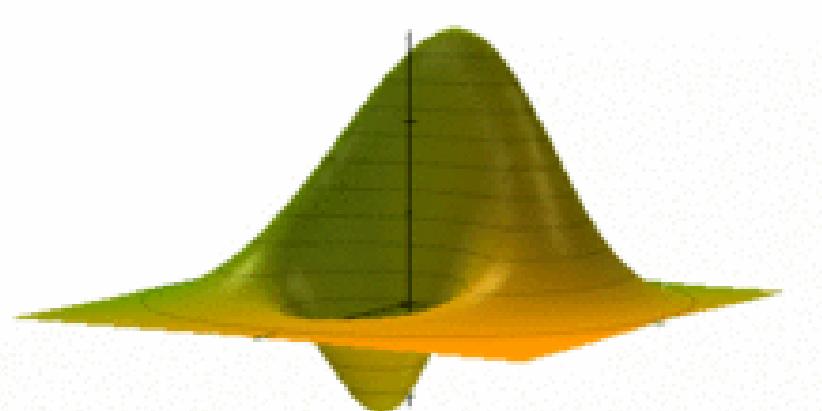
$$\frac{\partial f_W}{\partial t} (\mathbf{x}; \mathbf{p}) = -\frac{\mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}}{m} f_W (\mathbf{x}; \mathbf{p}) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{q} f_W (\mathbf{x}; \mathbf{p} + \mathbf{q}) V_W (\mathbf{x}; \mathbf{p})$$

- Time-independent Wigner equation

$$H(x; p)^* f_W (x; p) = E \cdot f_W (x; p)$$

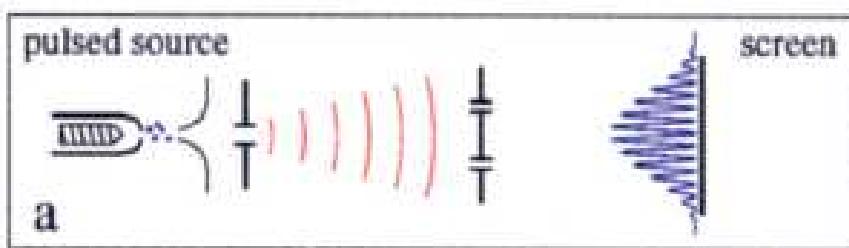
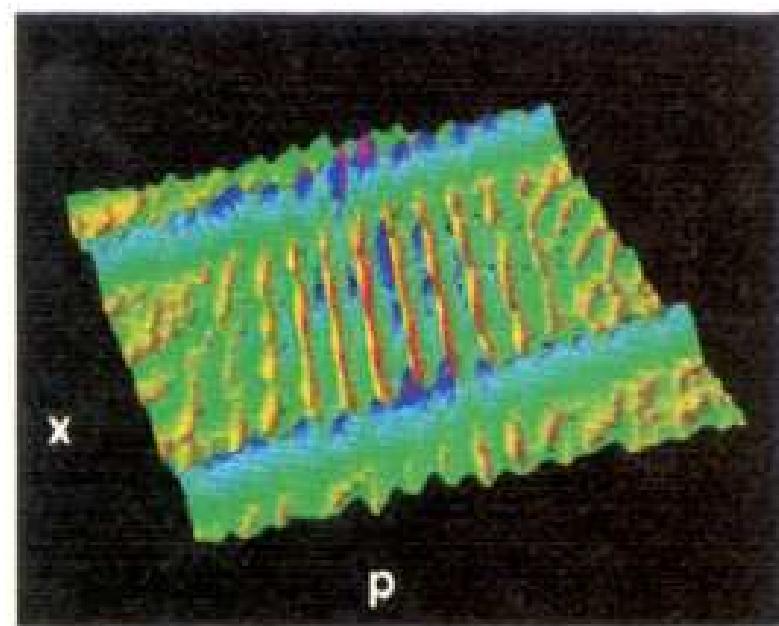
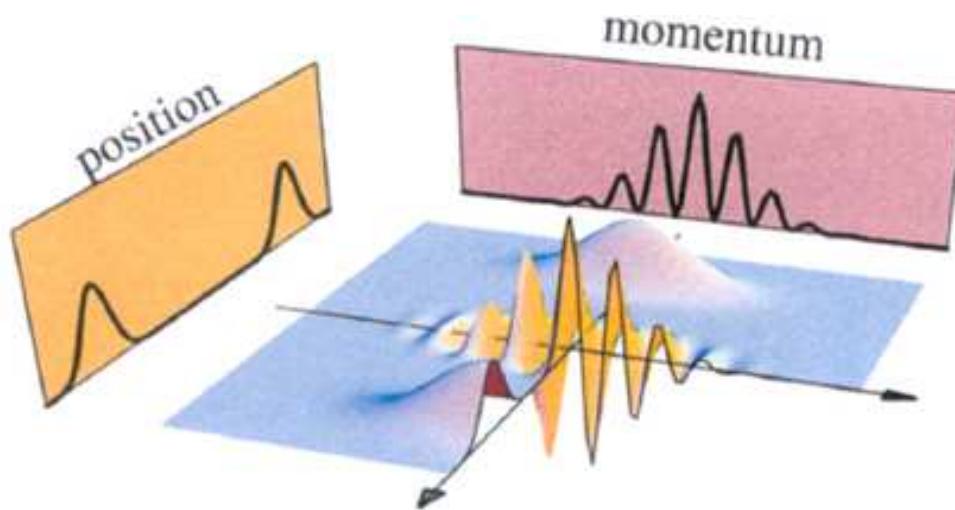
Phase space formulation - II

- Quasi-distributions



* Figs. taken from Schwaha et al., MCMA (2013) and Wikipedia.

Phase space formulation - III



* Fig. taken from Leibfried et al., Physics Today, (1998).

Wigner-Weyl transform

$$\begin{aligned}\hat{A}(\hat{q}, \hat{p}) &\mapsto V_W(\hat{A}) = A(x, p) = \\ &= \frac{\hbar}{2\pi} \int d\xi \int d\eta \operatorname{Tr} \{ \hat{A}(\hat{q}, \hat{p}) e^{i\xi \hat{q} + i\eta \hat{p}} \} e^{-i\xi x - i\eta p}\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} A * B & \equiv V_W(\hat{A} \cdot \hat{B}) \\ [A, B]_M & \equiv \frac{1}{i\hbar} (A * B - B * A) \end{array} \right.$$

Advantages

- *Full-Quantum approach*
 - *Time dependent*
 - *Intuitive formalism*
-
- *Inclusion of inelastic effects
(phonon scattering)*
 - *General boundary conditions*
-
- *Monte Carlo techniques exist*

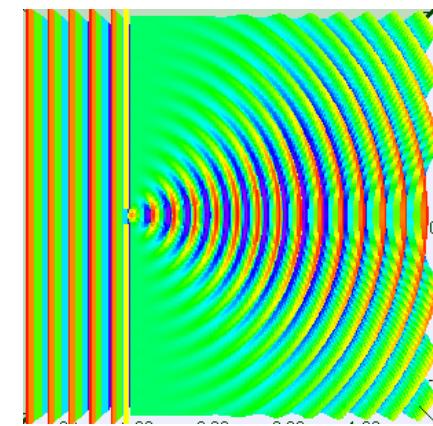


Fig. from wikipedia.